SOBRE A DETERMINAÇÃO DO PERFIL LONGITUDINAL DE CABO DE PROTENSÃO

Angelo Rubens Migliore Junior, Prof. Dr.
Centro Univ. da Fundação Educacional de Barretos; Migliore & Pastore Eng. Ltda.
rubens.migliore@hotmail.com

RESUMO

Este texto deduz equações para determinar a geometria de cabos de protensão com perfil longitudinal composto por trechos retilíneos e parabólicos a partir do conhecimento da tangente inicial em cada segmento e de um ou dois pontos adicionais. São definidos pontos notáveis nas extremidades de segmentos e são determinadas a inclinação da curva e a coordenada em elevação de um ponto qualquer referenciado a um sistema de coordenadas ao longo do perfil em um plano vertical. É apresentado exemplo típico sistematizando o procedimento numérico para permitir traçar a trajetória do cabo em campo e auxiliar na determinação do cabo resultante.

Palavras chave: Protensão; perfil de cabo em elevação; equações da reta e da parábola.

1. Introdução

Denomina-se por cablagem ao conjunto de cabos de protensão que devem compor a armadura ativa necessária para um elemento protendido. O conjunto de posições ao longo do eixo longitudinal de vigas que devem ser ocupados por um certo cabo de protensão é identificada como perfil longitudinal vertical do cabo. Em vigas esbeltas com pós-tração aderente ou não, o perfil vertical algumas vezes é acompanhado por desvios em planta para permitir que alguns cabos posicionados em uma mesma camada na seção crítica sofram pequenos movimentos horizontais para serem levantados ao longo do plano vertical e possam ser ancorados ao longo do eixo vertical de simetria da viga em suas extremidades. Em lajes, é comum o cabo de protensão apresentar desvios de trajetória tanto na vertical quanto na horizontal de magnitudes semelhantes. Este texto trata apenas do caso de vigas com o intuito de introduzir o assunto e simplificar as equações a serem obtidas.

2. Geometria do perfil longitudinal do cabo

A determinação da trajetória de um certo cabo de protensão em relação ao plano vertical é necessária para a avaliação das perdas por atrito, do alongamento do cabo, do efeito de bloqueio devido à acomodação da ancoragem e para a determinação do cabo resultante em cada seção transversal de projeto. Em suma, o conhecimento da posição do cabo e de sua inclinação ao longo do eixo de uma viga é condição obrigatória para a verificação das tensões em serviço e para a verificação da capacidade resistente no estado limite último em cada seção transversal.É prática corrente que o cabo no meio do vão possua um trecho horizontal de cerca de 15 a 20% do comprimento da viga para absorver a envoltória de esforços devido às ações móveis, principalmente em obras de arte. É também desejável que os segmentos curvos do cabo apresentem trajetória de uma parábola de 2º grau, a qual apresenta algumas vantagens algébricas na sua utilização.Com intuito de minimizar os efeitos de atrito, recomenda-se que cada segmento de trecho parabólico possua projeção horizontal como sendo da ordem de, no mínimo, 6 vezes o desnível na projeção vertical. Atendida esta condição, diz-se que o cabo possui uma curva abatida, o que permite impor algumas simplificações na avaliação da força de protensão.Segundo o item 18.6.1.5 da ABNT NBR 618:2014, todo cabo de protensão deve possuir na extremidade de viga ou de laje, um segmento retilíneo para alinhar perfeitamente o eixo do cabo com o dispositivo de ancoragem. Para o caso de cabos com bainhas metálicas este segmento deve ser de, no mínimo, 1 m e, para o caso de cabos com cordoalhas engraxadas, este segmento deve ser de, no mínimo 0,5 m. Estas especificações auxiliam na fixação das ancoragens e no posicionamento do atuador hidráulico *("macaco")* de modo a estes ficarem perpendiculares ao eixo do cabo para mitigar desvios construtivos e recuos excessivos das cunhas de ancoragem.

Com as restrições acima, na prática, não existem cabos com uma única trajetória parabólica, mas existem cabos formados por segmentos de reta (inclinadas ou horizontais) e por segmentos de parábola.

Um certo trecho retilíneo adjacente ao trecho parabólico deverá possuir concordância com o trecho parabólico, isto é, o trecho retilíneo deve possuir mesma inclinação com a tangente do trecho parabólico adjacente. De modo semelhante, em alguns casos é desejável que o trecho parabólico possua inflexão, ou seja, mudança de curvatura entre dois segmentos parabólicos com mesma tangente no ponto de inflexão. Assumir que o perfil longitudinal de um certo cabo é composto por uma única parábola é uma simplificação que pode ser muito grosseira em vigas com cabo de traçado complexo.

É usual escolher certos pontos de passagem de um cabo de protensão, por exemplo, junto ao fundo da viga no meio do vão e próximo ao centroide da seção na extremidade ou *"cabeça"* da viga. Estes pontos, impostos pelo projetista estrutural, serão identificados neste texto como pontos notáveis, ou seja, posições fixas para passagem do cabo de protensão.

3. Algumas propriedades da reta e da parábola de segundo grau.

Do ponto de vista matemático, a equação de uma reta no plano fica definida conhecendo apenas duas constantes e a equação de uma parábola de segundo grau no plano necessita de três constantes para ficar completamente definida.

Entre dois pontos notáveis *1* e *2*, a equação que descreve o segmento linear fica determinada quando conhecidas a direção da reta no ponto inicial *1* e as suas coordenadas em relação a um sistema global de referência *x0y*, tal como indicam a Eq. (1) e a Figura 1.

$$y = y_1 + tg\alpha_1(x - x_1) \quad \text{Eq. (1)}$$

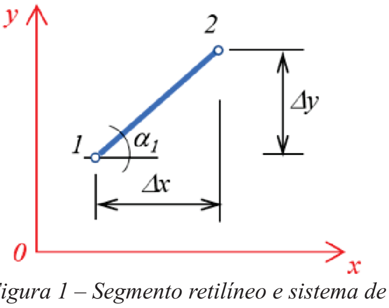

Figura 1 – Segmento retilíneo e sistema de coordenadas global

A Eq. (1) vale para o domínio [1-2] e sua primeira derivada apresentada na Eq. (2) indica que a direção da reta no final do segmento é igual à direção no início do segmento.

$$y' = \frac{dy}{dx} = tg\alpha_1 = cte \quad \text{Eq. (2)}$$

De modo semelhante, a equação da parábola fica determinada a partir de um ponto inicial *1* de tangente conhecida e as coordenadas dos pontos *1* e *2*. É útil referenciar a um sistema local *u0v* com origem no ponto de declividade nula da parábola e paralelo ao sistema global *x0y*, tal como indicado na Figura 2. Nesta Figura, u_1 é a distância horizontal entre o ponto *1* e a origem do sistema de coordenadas local e *tx* e *ty* são as translações entre os dois sistemas de coordenadas.

As Eq. (4), (5) e (6) mostram as relações descritivas de uma parábola tanto para o sistema local quanto para o sistema global de coordenadas.

Sistema local	Sistema global	
$v = k\,u^2$	$y = ax^2 + bx + c$	Eq. (4)
$v' = 2k\,u$	$y' = 2a\,x + b$	Eq. (5)
$v'' = 2k$	$y'' = 2a$	Eq. (6)

Comparando a Eq. (6) nos dois sistemas e sendo conhecida a declividade da curva no ponto *1*, pode ser verificado pela Eq. (5) que:

$$tg\alpha_1 = v' = 2k\,u_1 \quad \therefore \quad k = \frac{tg\alpha_1}{2\,u_1} = a \qquad \text{Eq. (7)}$$

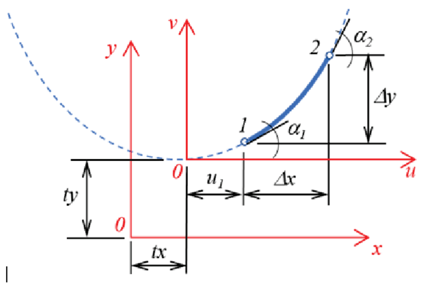

Figura 2 – Segmento parabólico e sistemas de coordenadas global e local

Aplicando a Eq. (5) para a posição de declividade nula resulta:

$$y'\big|_{tx} = 0 = 2k\;tx + b$$

$$\therefore \quad b = -2k\;tx \qquad \text{Eq. (8)}$$

Aplicando a Eq. (5) para a posição *1* e combinando com a Eq. (8) é obtida a translação horizontal entre os sistemas de coordenadas:

$$\therefore \quad tx = x_1 - \frac{tg\alpha_1}{2k} \qquad \text{Eq. (9)}$$

Aplicando a Eq. (4) na posição *1* no sistema local pode ser obtida a translação vertical entre os sistemas de coordenadas:

$$\therefore \quad ty = y_1 - k\left(x_1 - tx\right)^2 \qquad \text{Eq. (10)}$$

De outro modo, subtraindo as ordenadas verticais globais dos pontos *2* e *1*, vem:

$$\therefore \quad tx = \frac{k\left(x_2^{\,2} - x_1^{\,2}\right) - \Delta y}{2k\;\Delta x} \qquad \text{Eq. (11)}$$

Igualando as Eqs. (9) e (11), desenvolvendo e simplificando, finalmente pode ser determinado o valor da constante *k* de certa parábola em relação às coordenadas do sistema global *x0y*:

$$x_1 - \frac{tg\alpha_1}{2k} = \frac{k\left(x_2^{\,2} - x_1^{\,2}\right) - \Delta y}{2k\;\Delta x}$$

$$2k\;x_1 - tg\alpha_1 = \frac{k\left(x_2 + x_1\right)\Delta x - \Delta y}{\Delta x}$$

$$\therefore \quad k = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - tg\alpha_1\right)\frac{1}{\Delta x} \qquad \text{Eq.(12)}$$

Conhecendo a constante k, todas os demais valores ficam determinados para o domínio [1-2], inclusive a tangente no ponto final *2* a partir da Eq. (5):

$$y'\big|_{x_2} = tg\alpha_2 = 2k\;\left(x_2 - tx\right) \qquad \text{Eq. (13)}$$

A partir da tangente e das coordenadas globais do ponto notável final do segmento, fica condicionada a equação do segmento seguinte, seja este parabólico ou retilíneo.

Conhecendo a inclinação no início de cada segmento retilíneo ou curvo e as variações de trajetórias vertical e horizontal entre o início e o fim de cada segmento, podem ser determinadas as ordenadas verticais globais *y* para qualquer posição *x* dentro de cada segmento através das Eqs. (1) e (4).

4. Aplicação para um caso típico

Uma situação comum é o caso de uma viga isostática cujo perfil longitudinal do cabo de protensão poderia ser descrito por três segmentos entre os pontos notáveis *1* até *4*, tal como exemplificado na Figura 3. Nesta Figura, é considerado o caso de viga bi apoiada de comprimento total *L* com carregamento gravitacional, para o qual o perfil longitudinal do cabo de protensão é simétrico, sendo *4* o ponto de simetria na vertical. Neste caso particular, é necessário conhecer inicialmente a direção de concordância entre os dois primeiros segmentos, tal como efetuado a seguir.

Seja o ponto notável *1* aquele correspondente à saída do cabo junto à placa de ancoragem e o ponto *4* o ponto mais baixo do cabo, havendo, portanto, três segmentos com trajetórias diferentes em meia viga. Os segmentos *1-2* e *3-4* são retilíneos e o segmento *2-3* é uma parábola de segundo grau.

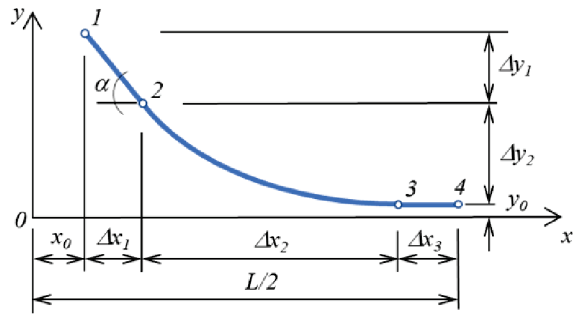

Figura 3 – Exemplo de perfil longitudinal de cabo de protensão de viga isostática simétrica

O sistema de coordenadas *x0y* relaciona coordenadas globais medidas em relação à face inferior esquerda da viga. Geralmente, são arbitradas algumas coordenadas globais, a saber:

x_0 – distância da placa de ancoragem à extremidade da viga (cerca de 15 cm para o caso de cabos com bainhas metálicas)

y_1 – coordenada vertical da posição de saída de um certo cabo

$y_0 = y_3 = y_4$ – coordenada vertical das posições mais baixas de um certo cabo

Arbitrando as projeções na horizontal Δx_1, Δx_2 e Δx_3 de cada segmento e impondo à concordância de inclinação do cabo no ponto *2* tanto para o trecho retilíneo *1-2* quanto para o início do trecho curvo *2-3*, pode ser obtida a igualdade:

$$tg\alpha_{12} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = tg\alpha_{23} = \frac{2\Delta y_2}{\Delta x_2} \qquad \text{Eq. (14)}$$

Fixando para o comprimento Dx_1 um valor superior ao mínimo de 1m para cabos com bainhas metálicas e fixando para Dx_3 um comprimento desejável, restam como incógnitas as variações Dy_1 e Dy_2 e a inclinação da tangente a. Esta última pode ser obtida por:

$$tg\alpha = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \frac{2\Delta y_2}{\Delta x_2} = \frac{\Delta y_1 + 2\Delta y_2}{\Delta x_1 + \Delta x_2}$$

$$sendo: \quad \Delta y_1 + \Delta y_2 = y_0 - y_1$$

$$\rightarrow \quad \frac{2\Delta y_2}{\Delta x_2} = \frac{y_0 - y_1 + \Delta y_2}{\Delta x_1 + \Delta x_2}$$

$$\therefore \quad \Delta y_2 = \frac{y_0 - y_1}{2\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} + 1} \qquad \text{Eq. (15)}$$

A partir do deslocamento Δy_2, ficam determinados os valores necessários:

$$y_2 = y_0 - \Delta y_2$$

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1$$

$$tg\alpha = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} \qquad \text{Eq. (16)}$$

Como exemplo numérico, adotando valores na horizontal de $L = 36,3m$, $\Delta x_0 = 0,15m$, $\Delta x_1 = 2,0m$, $\Delta x_2 = 12,0m$ e $\Delta x_3 = 4,0m$, e ordenadas verticais $y_1 = 1,40m$ e $y_0 = 0,20m$, as Eqs. (15) e (16) fornecem os seguintes resultados:

$$\Delta y_2 = \frac{y_0 - y_1}{2\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} + 1} = \frac{0,20 - 1,40}{2\frac{2,0}{12,0} + 1} = -0,90m$$

$$y_2 = y_0 - \Delta y_2 = 0,20 - (-0,90) = 1,10m$$

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = 1,10 - 1,40 = -0,30m$$

$$tg\alpha = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \frac{-0,30}{2,0} = -0,15m/m$$

O sinal negativo para a inclinação α corresponde ao sentido horário, ou seja, contrário ao sentido trigonométrico considerado positivo.

Para um ponto M qualquer, tal como a meia distância do trecho 2-3, ficam determinadas a posição na vertical e a inclinação da curva através das Eqs. (4), (5), (8), (9), (10), (12) e (13) para o sistema global, tal como segue:

$$x_M = 0,15 + 2,0 + \frac{12,0}{2} = 8,15m$$

$$u_M = x_M - x_2 = 8,15 - 2,15 = 6,0m$$

$$k = \left(\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2} - tg\alpha\right)\frac{1}{\Delta x_2} = \left[\frac{(-0,90)}{12,0} - (-0,15)\right]\frac{1}{12,0}$$

$$k = 0,00625m^{-1}$$

$$v_M = k\, u_M^{\ 2} = 0,00625 \times 6,0^2 = 0,225m$$

$$tx = x_2 - \frac{tg\alpha}{2k} = (0,15 + 2,0) - \frac{(-0,15)}{2 \times 0,00625} = 14,15m$$

$$ty = y_2 - k(x_2 - tx)^2 = 1,10 - 0,00625 \times (2,15 - 14,15)^2$$

$$ty = 0,200m$$

$$y_M = ty + v_M = 0,200 + 0,225 = 0,425m$$

$$tg\alpha_M = y'|_M = 2k\,(x_M - tx)$$

$$tg\alpha_M = 2 \times 0,00625 \times (8,15 - 14,15) = -0,075m/m$$

Conclusões

O perfil longitudinal de um cabo de protensão no plano vertical fica completamente definido em segmentos retilíneos e parabólicos concordantes nos pontos de interseção, aqui chamados de pontos notáveis. As equações algébricas descritivas para cada tipo de segmento em relação a um sistema de coordenadas global foram deduzidas e apresentadas para o domínio correspondente a um par de pontos notáveis sequenciais.Com auxílio das equações deduzidas, fica simples a determinação da coordenada vertical e da declividade de um cabo para qualquer ponto intermediário em relação a uma coordenada horizontal global, desde que sejam determinadas as constantes geométricas de cada segmento. Automatizando o procedimento aqui descrito em planilhas eletrônicas ou em programas computacionais, é possível obter com precisão a posição de pontos e a inclinação do perfil de um certo cabo para posições pré-estabelecidas em relação a uma referência fixa.

Referências bibliográficas

ABNT – ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2014, 238p.