



## Estratégias para definição da seção resistente de vigas pré-fabricadas de edifícios com pré-tração

*Strategies for setting section of prefabricated buildings beams with pre-traction*

Angelo Rubens Migliore Junior

Migliore & Pastore Engenharia Ltda., Programa Pós-graduação em Engenharia de Estruturas Unilins/Sociesc  
*rubens.migliore@hotmail.com*

*Rua Santo André, 238 – S.J. Rio Preto – SP – 15014-490*

### Resumo

O projeto de vigas pré-fabricadas de edifícios busca vencer maiores vãos para reduzir o número de ligações de extremidade. Em comparação com vigas de concreto armado moldado no local, esta possibilidade fica parcialmente prejudicada pela perda de rigidez devido à fissuração e fluência. A protensão auxilia na redução das dimensões da viga pelo controle ou eliminação da fissuração, evitando definir peças muito altas ou volumosas. A definição da seção de vigas em indústrias de pré-fabricados é geralmente regida por condições arquitetônicas, disponibilidade de formas e experiência anterior em obras com solicitação semelhante, sendo muitas vezes dominada pelo processo de tentativa e erro. Este trabalho apresenta uma estratégia geral e simples para a definição da seção de vigas protendidas com pré-tração pela sistematização e hierarquia das principais variáveis envolvidas. É apresentada a análise de flexão de vigas de edifícios, retas e bi-articuladas, com ações moderadas típicas e de rigidez uniforme, seção simples ou composta pela incorporação de parte de mesa moldada no local, visando obter inequações úteis na prática de projeto para definir as propriedades geométricas da seção resistente inicial e final.

*Palavras-Chave: Protensão com pré-tração; seção simples; seção composta.*

### Abstract

Design of building precast beams seeking to win larger spans to reduce number of end connections. This possibility is partially crippled by stiffness loss due to cracking and creep when compared with concrete beams molded on site. The prestressing assists in reducing the beam size by control or elimination of cracking and to avoid set too high or bulky elements. In prefabricated industries, definition of section beams is generally governed by architectural conditions, availability of forms and previous experience in similar request, often dominated by trial and error. This work presents a simple and general strategy for defining the section of prestressed beams with pre-tension with systematization and hierarchy of main variables involved. It is presented the analysis of bending of straight and bi-articulated building beams with moderate and typical uniform stiffness, simple or composite section by incorporating part of floor molded on site, in order to obtain useful inequalities in design practice to define geometric properties for initial and definitive section.

*Keywords: Prestressing with pre-traction; simple section; composite section.*

## 1 Introdução

A utilização de vigas pré-fabricadas de concreto em edifícios comerciais e industriais é mais vantajosa quando é possível minimizar o número de ligações de extremidade, dentre outros aspectos. De modo diferente das estruturas de concreto convencional, a ligação de viga pré-moldada com seu apoio apresenta características próprias que tendem a aumentar o custo tanto quanto maior o número de restrições de movimento impostas. Como decorrência, em geral é interessante executar vigas moldadas no local com ligações monolíticas ao passo que, para vigas pré-moldadas é melhor utilizar apoios articulados.

Visando a redução do número de ligações, a definição em projeto para o arranjo estrutural busca aumentar o vão da viga e a redução do número de pilares. Em comparação com vigas de concreto moldadas no local, a possibilidade de maior vão fica parcialmente prejudicada pela perda de rigidez devido à fissuração e à fluência, aliado ao fato de que as peças são articuladas nas extremidades.

De fato, o aumento do vão livre da viga conduz a solicitações de flexão que variam com o quadrado do vão para ações uniformes e conduzem a flechas que variam com a quarta potência do vão, mantidas as mesmas condições de carregamento, vinculação e rigidez. A título de exemplo, dobrar o vão de viga implica em quadruplicar o momento fletor solicitante e amplificar em 16 vezes a flecha, para as mesmas condições iniciais.

Como forma de contornar a fissuração e a flecha excessivas em peças de concreto armado, a protensão é uma importante técnica para auxiliar na redução das dimensões da viga em razão do maior controle ou total eliminação da fissuração. Como resultado, é possível definir peças com menor volume ou com menores alturas.

## 2 Protensão de vigas pré-fabricadas

A execução de vigas isostáticas com grandes vãos e grandes carregamentos tradicionalmente utiliza a técnica de pós-tração cuja característica principal é dispor cabos de grande potência com traçado longitudinal acompanhando o andamento da envoltória de momentos fletores. O lançamento desses cabos resulta em formato parabólico com redução da excentricidade de protensão em direção às extremidades para minimizar tensões de tração na borda da viga oposta ao cabo quando da redução da flexão próxima aos apoios.

De modo diverso, o lançamento de cabos de protensão em vigas isostáticas pré-fabricadas para edifícios com carregamentos e vãos moderados utiliza a técnica de pré-tração pela maior simplicidade do processo produtivo quando pode ser utilizada uma única pista de grande comprimento para a produção simultânea de diversas peças.

Usualmente, a pré-fabricação de vigas com pré-tração utiliza o cabo de protensão com formato reto e não permite explorar a melhor forma curva para o cabo, tal como em peças com pós-tração. São previamente fixadas as seções transversais das peças para reutilização de formas e são padronizadas as posições dos cabos devido à utilização de pentes para separação das peças. A liberdade de escolha da força de protensão é independente do andamento da envoltória de esforços de flexão e limitada em razão da manutenção da posição do cabo, quando não é utilizado o recurso de engrossamento de seção ou o isolamento de cabos na extremidade da peça.

As propriedades geométricas da seção pré-fabricada podem variar caso seja incorporada capa moldada no local. Após o endurecimento do concreto, a capa promove a solidarização de painéis isolados de lajes pré-fabricadas entre si e entre as vigas, possibilitando tratar o pavimento como um diafragma rígido. Desde que seja garantida a ligação entre a peça inicial (pré-viga) e a mesa moldada no local, é possível explorar o

ganho de altura útil da viga pela incorporação de uma mesa de compressão superior e a formação de seção composta com maiores altura e inércia.

A Figura 1 ilustra algumas alternativas usuais para a forma geométrica de seções pré-fabricadas de edifício onde há a necessidade de também apoiar lajes, eventualmente também pré-fabricadas. Cada forma geométrica apresenta vantagens e desvantagens a serem consideradas em cada caso.

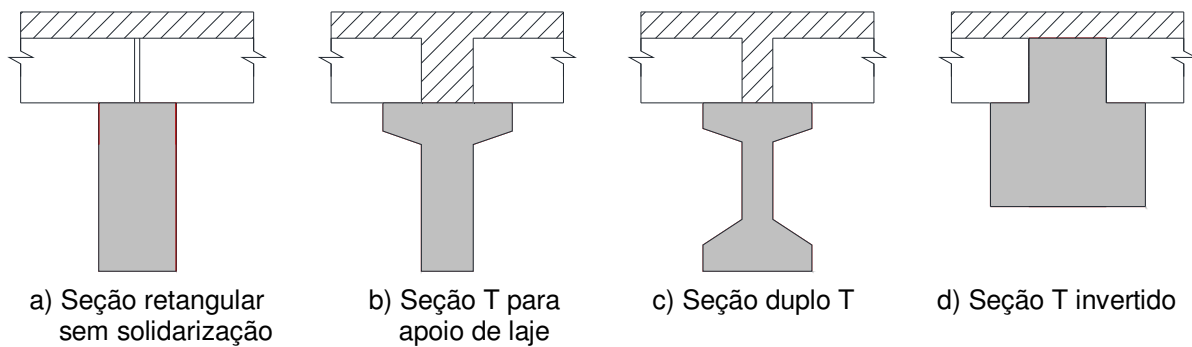


Figura 1 – Seções típicas de vigas pré-fabricadas para edifício.

Em razão de limitações inerentes, este texto apresenta um procedimento para escolha da seção transversal visando especificamente à verificação de tensões elásticas devido à flexão no ELS. Não são considerados aspectos de verificação da resistência no ELU de flexão ou de cisalhamento e nem verificações de flecha.

Vigas protendidas com pré-tração em ambiente de agressividade superior a CAA II não devem apresentar fissuras para determinadas combinações de ações, em virtude do maior risco de corrosão da armadura ativa e de que tais peças não receberão outra proteção além do cobrimento adequado. A fibra mais tracionada durante a aplicação do carregamento externo deve prevenir a possibilidade de formação de fissuras (Tabela 13.3 da NBR-6118:2007), o que obriga verificar os Estados Limites ELS-F e ELS-D para diferentes combinações segundo a classe de agressividade. Esta condição pode ser atendida pela verificação da tensão elástica nessa fibra, tal como aqui apresentado.

### 3 Tensões elásticas no concreto

#### 3.1 Situação genérica

Normalmente, vigas pré-fabricadas protendidas são montadas em campo sem auxílio de escoramentos e, a partir da aplicação da protensão na fábrica até a situação final de solidarização em campo, a peça está sujeita a deformações imediatas e ao longo do tempo, variando tanto o carregamento quanto a inércia e a rigidez do elemento.

Separando a protensão em dois efeitos distintos tal como indicado por LIN & BURNS (1981) e discutido por BUCHAIM (2008), a saber, o cabo resultante de protensão sujeito à força de tração  $P$  em um instante qualquer e a seção não fissurada de concreto sujeita à força de compressão  $C$ , o equilíbrio destas resultantes de força equilibra o momento fletor  $M$  aplicado pelas ações externas naquele mesmo instante, tal como esquematizado na Figura 2.

Aqui é admitido que o momento externo  $M$  é sempre positivo, com tração nas fibras inferiores e que foi determinado para a seção do meio do vão de viga bi-apoiada.

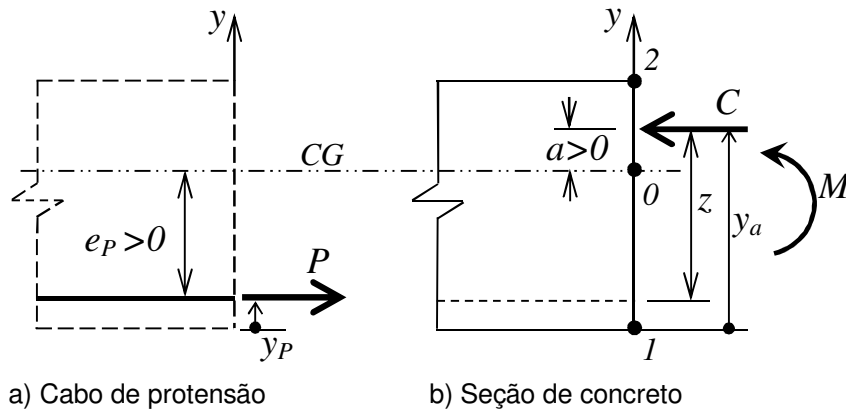


Figura 2 – Equilíbrio de forças entre o cabo resultante e a seção de concreto.

Impondo como conhecidas a força no cabo resultante  $P$ , sua posição  $y_P$  e o momento externo  $M$ , fica determinada a intensidade da força de compressão  $C$  no concreto, o braço de alavanca  $z$  entre as resultantes  $P$  e  $C$  e sua posição de atuação, ou seja, a distância  $a$  do centro de pressão em relação ao  $CG$  da peça.

$$C = P = \frac{M}{z}; \quad z = a + e_P \rightarrow a = \frac{M}{P} - e_P \quad (1)$$

onde  $a$  é positivo para cima e  $e_P$  é a excentricidade da força de protensão medida em relação ao  $CG$ , positiva para baixo.

Por conveniência deste autor, as posições do centro de pressão  $y_a$  e do cabo resultante  $y_P$  são determinadas em relação ao sistema de coordenadas da Figura 2 com origem no fundo da peça, resultando em:

$$e_P = y_0 - y_P; \quad y_a = a + y_0 = \frac{M}{P} + y_P \quad (2)$$

Deve ser observado que  $y_0$  pode variar, pois mede a posição do Centro Geométrico  $CG$  da seção a partir do fundo da peça, para certa etapa construtiva.

A Figura 2 mostra que é sempre possível achar uma posição de equilíbrio estático para a seção de concreto, mas não inclui qualquer condição de resistência. Da Eq. (2) pode ser observado que o centro de pressão coincide com a posição do cabo resultante quando o momento externo é nulo, tal como ocorre na extremidade de vigas isostáticas.

Identificando por 0 e 1 as fibras do  $CG$  e da borda inferior da seção transversal da peça e considerando apenas a seção de concreto comprimida excentricamente pela força  $C$ , é possível determinar as tensões normais elásticas como sendo:

$$\sigma_0 = -\frac{C}{A_c} \quad (3)$$

$$\sigma_1 = -\frac{C}{A_c} + \frac{C \cdot a}{W_1}$$

onde  $A_c$  é a área e  $W_1$  é o módulo resistente da seção de concreto em relação à borda inferior para certa etapa construtiva e as tensões são consideradas com seus valores algébricos, sendo positivas quando de tração e negativas quando de compressão.

Com a notação utilizada, a tensão em uma fibra qualquer medida pela distância  $y$  ao fundo da peça, pode ser obtida a partir das tensões nas fibras 0 e 1 como sendo:

$$\sigma_y = \sigma_1 + (\sigma_0 - \sigma_1) \frac{y}{y_0} \quad (4)$$

Em particular, interessa determinar a tensão na fibra superior 2, onde a coordenada  $y$  equivale à altura total da seção simples  $h_s$ :

$$\sigma_2 = \sigma_1 + (\sigma_0 - \sigma_1) \frac{h_s}{y_{0s}} = \sigma_0 \frac{h_s}{y_{0s}} + \left(1 - \frac{h_s}{y_{0s}}\right) \sigma_1 \quad (5)$$

Da Eq.(2) e com o sistema de coordenadas adotado, pode ser determinada a posição  $y_a$  do centro de pressão e a distância  $a$  desse centro em relação ao  $CG$ :

$$a = y_a - y_0 = \frac{M}{P} - (y_0 - y_p) \quad (6)$$

As tensões extremas nas fibras podem ser avaliadas a partir das Eqs. (3) e (4) por:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= -\frac{P}{A_C} \\ \sigma_1 &= -P \left[ \frac{1}{A_C} + \frac{(y_0 - y_p)}{W_1} \right] + \frac{M}{W_1} \\ \sigma_2 &= -P \left[ \frac{1}{A_C} - \frac{(y_0 - y_p)}{W_2} \right] - \frac{M}{W_2} \end{aligned} \quad (7)$$

A seção resistente pode sofrer alteração de inércia pelo acréscimo de mesa adicional de compressão, mas a posição do cabo em relação ao fundo da peça permanece fixa. Assim, a coordenada  $y_p$  é constante para qualquer etapa construtiva, apesar da possibilidade de variação das demais propriedades geométricas.

### 3.2 Ato de protensão

No instante da transferência da protensão ao concreto podem ser impostas as relações decorrentes da Eq. (6) para a força de protensão e o centro de pressão para a seção meio do vão nesta etapa construtiva:

$$\begin{aligned} P &= \gamma_{pi} P_0 \\ y_{a0} &= \frac{M_0}{\gamma_{pi} P_0} + y_p \end{aligned} \quad (8)$$

onde  $P_0$  é a força de protensão aplicada pelo macaco hidráulico,  $\gamma_{pi}$  é a parcela de perda de protensão imediata e  $M_0$  é o momento fletor na seção meio do vão devido apenas ao peso próprio  $g_0$  da peça. Para vigas pré-fabricadas com pré-tração, com carregamentos e vãos usuais de edifícios, pode-se avaliar a perda de protensão inicial como sendo da ordem de 5% a 10% da força inicial de protensão aplicada  $P_0$ , o que equivale impor ao coeficiente  $\gamma_{pi}$  valores entre 0,95 e 0,90. A perda imediata é tanto maior quanto maior é a compressão inicial devido à protensão e tanto menor quanto maior é o comprimento da pista de protensão.

As tensões são determinadas com a particularização das Eqs. (7) e devem atender a aos limites seguintes onde o índice  $S$  indica as propriedades geométricas da seção simples da pré-viga:

$$\begin{aligned}\sigma_{00} &= -\gamma_{pi} \frac{P_0}{A_{CS}} \\ \sigma_{10} &= -\gamma_{pi} P_0 \left[ \frac{1}{A_{CS}} + \frac{(y_{0S} - y_P)}{W_{1S}} \right] + \frac{M_0}{W_{1S}} \geq \sigma_{\min,j} \\ \sigma_{20} &= -\gamma_{pi} P_0 \left[ \frac{1}{A_{CS}} - \frac{(y_{0S} - y_P)}{W_{2S}} \right] - \frac{M_0}{W_{2S}} \leq \sigma_{\max,j}\end{aligned}\quad (9)$$

As tensões  $\sigma_{\max,j}$  e  $\sigma_{\min,j}$  são limites admissíveis com sinais algébricos para uma determinada combinação de carregamento e para uma determinada idade, de modo a enquadrar a peça nas condições de Protensão Completa ou Limitada, conforme o ELS a ser obedecido. Em particular, para a etapa de Ato de Protensão, estes limites podem ser:

$$\begin{aligned}\sigma_{\max,j} &= 1,2(0,7f_{ctj}) = 0,84f_{ctj} \quad (\text{ELS-F}) \\ \sigma_{\min,j} &= -0,7f_{cj} \quad (\text{ELS-CE})\end{aligned}\quad (10)$$

As tensões resistentes  $f$  do concreto jovem à tração e à compressão são indicadas em valor absoluto e devem se referir à idade fictícia  $j$ . Na prática, esta idade relaciona o amadurecimento do concreto devido à cura normal ou acelerada, geralmente sendo estipulada resistência mínima de 60% em relação ao resultado característico medido aos 28 dias.

### 3.3 Montagem da estrutura

Durante a montagem da estrutura e enquanto o concreto lançado como capa ainda não endureceu, todo carregamento aplicado sobre a viga deve ser resistido com a seção inicial. Nessa etapa, o acréscimo de sollicitação de flexão  $M_1$  para a seção meio do vão refere-se aos pesos próprios de lajes e capeamentos  $g_1$ , além de uma parte  $\psi$  da ação acidental total  $q$  referente aos trabalhos de lançamento e cura do concreto. Admitindo que a força de protensão não esteja sujeita às perdas progressivas, a posição do centro de pressão sobe na medida em que aumenta a sollicitação de flexão e é determinada por:

$$y_{a1} = \frac{M_0 + M_1}{\gamma_{pi} P_0} + y_P \quad (11)$$

Usualmente, as tensões no concreto nesta etapa 1 não são as mais críticas. As tensões nas fibras podem ser avaliadas com os acréscimos de tensão devido ao acréscimo de flexão como a seguir indicado:

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_0 = 0 &\quad \rightarrow \sigma_{01} = -\frac{\gamma_{pi} P_0}{A_{CS}} \\ \Delta\sigma_1 = \frac{M_1}{W_{1S}} &\quad \rightarrow \sigma_{11} = -\gamma_{pi} P_0 \left[ \frac{1}{A_{CS}} + \frac{(y_{0S} - y_P)}{W_{1S}} \right] + \frac{M_0 + M_1}{W_{1S}} \\ \Delta\sigma_2 = -\frac{M_1}{W_{1S}} &\quad \rightarrow \sigma_{21} = -\gamma_{pi} P_0 \left[ \frac{1}{A_{CS}} - \frac{(y_{0S} - y_P)}{W_{2S}} \right] - \frac{M_0 + M_1}{W_{2S}}\end{aligned}\quad (12)$$

### 3.4 Solidarização de mesa adicional

Após o endurecimento do concreto da eventual mesa de compressão adicional, há nova alteração da posição do centro de pressão. O instante crítico para esta etapa

corresponde à situação de tempo infinito, pois a força de protensão é paulatinamente reduzida devido às perdas progressivas representadas pelo coeficiente  $\gamma_{pp}$ .

Ao invés de representar a perda de protensão ao longo do tempo por  $\Delta P$ , tal como indicado na literatura clássica [MASON (1976), PFEIL (1984), HANAI (2005)], preferiu-se aqui utilizar o coeficiente relativo  $\gamma_{pp}$  cuja inserção no trabalho de MIGLIORE (2008) mostrou-se adequada para simplificar as expressões obtidas, apesar da consideração simplificada do acréscimo de mesa naquele texto. Os valores absolutos das perdas de protensão imediata  $\Delta P_i$  e progressiva  $\Delta P_p$  podem ser avaliados por:

$$\Delta P_i = (1 - \gamma_{pi})P_0; \quad \Delta P_p = (1 - \gamma_{pp})\gamma_{pi}P_0 \quad (13)$$

O coeficiente  $\gamma_{pp}$  depende da força inicial de protensão, do comprimento e do peso próprio da viga e do concreto utilizado, variando entre 0,80 e 0,90 para situações usuais.

As deformações das fibras da seção inicial não podem ser aliviadas devido ao aumento de inércia da seção pela presença da nova mesa e as parcelas de flexão desta etapa devem ser absorvidas tanto pela eventual mesa superior de compressão quanto pela pré-viga. A determinação das tensões elásticas nas bordas da seção para esta etapa não é trivial. No entanto, para as fibras 0, 1 e 2 da seção da pré-viga, os respectivos acréscimos de tensões podem ser avaliados e devem ser verificadas em serviço para tensões limites do concreto da pré-viga tanto para ELS-F na borda inferior quanto para ELS-CE na borda superior, considerando agora a idade de 28 dias:

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_0 &= (1 - \gamma_{pp}) \frac{\gamma_{pi} P_0}{A_{CF}} \quad \rightarrow \sigma_{02} = \frac{y_{0F}}{y_{0S}} \sigma_{01} + \left(1 - \frac{y_{0F}}{y_{0S}}\right) \sigma_{11} + (1 - \gamma_{pp}) \frac{\gamma_{pi} P_0}{A_{CF}} \\ \Delta \sigma_1 &= (1 - \gamma_{pp}) \gamma_{pi} P_0 \left[ \frac{1}{A_{CF}} + \frac{(y_{0F} - y_P)}{W_{1F}} \right] + \frac{M_2}{W_{1F}} \\ &\quad \rightarrow \sigma_{12} = \sigma_{11} + (1 - \gamma_{pp}) \gamma_{pi} P_0 \left[ \frac{1}{A_{CF}} + \frac{(y_{0F} - y_P)}{W_{1F}} \right] + \frac{M_2}{W_{1F}} \leq \sigma_{\max} \\ \Delta \sigma_2 &= (1 - \gamma_{pp}) \gamma_{pi} P_0 \left[ \frac{1}{A_{CF}} - \frac{(y_{0F} - y_P)}{W_{2F}} \right] - \frac{M_2}{W_{2F}} \\ &\quad \rightarrow \sigma_{22} = \sigma_{21} + (1 - \gamma_{pp}) \gamma_{pi} P_0 \left[ \frac{1}{A_{CF}} - \frac{(y_{0F} - y_P)}{W_{2F}} \right] - \frac{M_2}{W_{2F}} \geq \sigma_{\min} \end{aligned} \quad (14)$$

onde  $M_2$  identifica o momento fletor devido às demais ações permanentes (pavimentação e revestimento  $g_3$  e alvenaria  $g_4$ ) e à parcela restante  $(1 - \psi)$  da ação acidental  $q$  para uma determinada combinação de carregamento, desde a Combinação Quase Permanente (CQP) até Combinação Rara (CR) e o índice  $F$  refere-se à seção resistente final (simples ou composta). Havendo mesa adicional, podem ser introduzidas relações entre as propriedades geométricas da seção final em relação à seção inicial como sendo:

$$k_y = \frac{y_{0F}}{y_{0S}}; \quad k_A = \frac{A_{CF}}{A_{CS}}; \quad k_{W1} = \frac{W_{1F}}{W_{1S}}; \quad k_{W2} = \frac{W_{2F}}{W_{2S}} \quad (15)$$

O valor destas relações varia muito com a geometria final da seção, mas a experiência deste autor observou valores variando em geral entre 1,2 e 3,0 para peças pré-fabricadas usuais de edifícios. Com o sistema de coordenadas adotado, os módulos resistentes podem também ser relacionados por:

$$I = y_0 W_1 = (h_S - y_0) W_2 = (h_F - y_0) W_4 \quad (16)$$

Para o caso de classe de agressividade CAA III, as tensões limites são:

$$\sigma_{\max} = \begin{cases} 0 & \rightarrow \text{para CFQ} \\ 0,84 f_{ctk} & \rightarrow \text{para CR} \end{cases} \quad (17)$$

$$\sigma_{\min} = -0,7 f_{ck} \rightarrow \text{para CR}$$

Apesar de não haver restrição na NBR-6118:2007 para a tensão na borda tracionada para pré-tração quando em ambiente com CAA I, este autor julga prudente que, com intuito de minimizar problemas de durabilidade decorrentes de fissuras indesejáveis quando da atuação do carregamento máximo sobre a peça, no limite superior pode ser aceita a tensão máxima de tração média  $f_{ctk}$  para a Combinação Rara, o que resulta em:

$$\sigma_{\max} = 1,2 f_{ctk} \rightarrow \text{para CR em CAA I} \quad (18)$$

Para avaliar as tensões na mesa adicional, uma aproximação razoável pode ser obtida considerando como válida a Hipótese de Bernouille de manutenção da seção plana durante a deformação elástica por flexão. Assim, o acréscimo de rotação da seção transversal deve ser igual tanto para a seção inicial quanto para a mesa adicional, permitindo considerar tensões na mesa correspondentes ao acréscimo de flexão da etapa construtiva. O diagrama de tensões final deve ser descontínuo na interface entre a eventual mesa e a pré-viga.

A Figura 3 ilustra esta condição mostrando as tensões elásticas no concreto até a etapa anterior à solidarização da mesa (devido à ação da protensão e das ações permanentes e acidentais) e as tensões finais após a solidarização (incluindo a perda progressiva de protensão e a parcela restante de ações permanentes e acidentais).

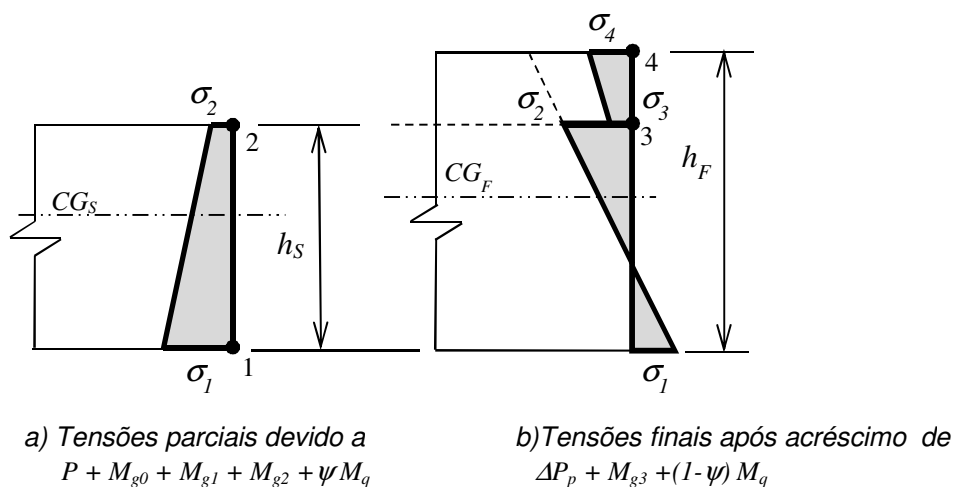


Figura 3 – Tensões elásticas parciais antes e totais após a solidarização de mesa adicional superior.

As tensões elásticas que atuam nas bordas da mesa adicional (3 e 4), devem possuir limites impostos pela resistência do concreto da mesa  $f_M$  e podem ser determinadas por:

$$\sigma_{32} = (1 - \gamma_{pp}) \gamma_{pi} P_0 \left[ \frac{1}{A_{CF}} - \frac{(y_{0F} - y_P)}{W_{2F}} \right] - \frac{M_2}{W_{2F}} \leq \sigma_{\max M} = 0,84 f_{ctk M} \quad (19)$$

$$\sigma_{42} = (1 - \gamma_{pp}) \gamma_{pi} P_0 \left[ \frac{1}{A_{CF}} - \frac{(y_{0F} - y_P)}{W_{4F}} \right] - \frac{M_2}{W_{4F}} \geq \sigma_{\min M} = -0,7 f_{ck M}$$



A tensão  $\sigma_{32}$  pode ser de tração, caso as perdas progressivas de protensão sejam maiores do que a compressão devido ao acréscimo de solicitação externa nesta etapa.

Para a determinação das propriedades geométricas com mesa adicional de concreto diferente daquele utilizado na pré-viga é importante efetuar a homogeneização da seção multiplicando as larguras reais dos trechos de mesa  $b$  pela relação entre os módulos de deformação dos dois concretos, de forma a obter a largura equivalente  $b_{eq}$ :

$$b_{eq} = \frac{E_{CM}}{E_C} b \quad (20)$$

onde  $E_{CM}$  e  $E_C$  são os módulos de deformação do concreto da mesa moldada no local e da pré-viga, respectivamente.

## 4 Módulo resistente mínimo

### 4.1 Borda inferior da pré-viga

Em geral, a borda inferior da viga no meio do vão apresenta a condição mais crítica, pois está sujeita à máxima compressão durante o Ato de protensão e está sujeita à maior tração quando da aplicação do maior momento externo devido ao carregamento total. Para estas condições, a força de protensão passa do valor máximo (sujeita apenas às perdas imediatas) até o valor mínimo quando ocorrem todas as perdas progressivas ao longo do tempo. De modo inverso, a borda superior da extremidade da viga também pode ser crítica, pois está sujeita a tensões opostas às do meio de vão. Neste texto, esta situação é desconsiderada, pois outros artifícios podem ser aplicados tais como isolamento de cabos ou engrossamento da seção.

Adaptando o procedimento apresentado por ROCHA (1972), pode ser igualada a tensão na borda inferior da seção meio do vão com os valores limites das tensões para as duas condições extremas expressas pelas Eqs. (9) e (14), multiplicando os dois termos da Eq. (9) pelo coeficiente  $\gamma_{pp}$  e subtraindo membro a membro, resulta a relação:

$$\begin{aligned} \gamma_{pi} \gamma_{pp} P_0 \left\{ \frac{1}{A_{CS}} \left( 1 - \frac{1}{k_A} \right) + \frac{1}{W_{1S}} \left[ y_{0S} \left( 1 - \frac{k_y}{k_{W1}} \right) - y_P \left( 1 - \frac{1}{k_{W1}} \right) \right] \right\} + \\ + \frac{1}{W_{1S}} \left[ (1 - \gamma_{pp}) M_0 + M_1 + \frac{M_2}{k_{W1}} \right] = -\gamma_{pp} \sigma_{\min,j} + \sigma_{\max} \end{aligned} \quad (21)$$

onde foi desprezada a parcela abaixo por ser pequena em presença das demais:

$$\gamma_{pi} P_0 \left\{ -\frac{1}{k_A} + \frac{1}{W_{1S}} \left[ y_{0S} \left( 1 - \frac{k_y}{k_{W1}} \right) - y_P \left( 1 - \frac{1}{k_{W1}} \right) \right] \right\} \approx 0 \quad (22)$$

O conhecimento de um valor mínimo para o módulo resistente da seção inicial fica condicionado à imposição da força de protensão inicial  $P_0$  e da relação entre as propriedades geométricas da seção, podendo ser obtido por:

$$W_{1S} \geq \frac{(1 - \gamma_{pp}) M_0 + M_1 + \frac{M_2}{k_{W1}}}{\gamma_{pp} \left[ -\sigma_{\min,j} - \frac{\gamma_{pi} P_0}{A_{CS}} \left( 1 - \frac{1}{k_A} \right) \right] + \sigma_{\max}} \quad (23)$$

Caso a seção final permaneça com as mesmas propriedades geométricas iniciais, os coeficientes  $k$  possuem valor unitário, o que permite uma condição mais simples para o valor mínimo do módulo resistente. Nesse caso, deve ser observado que o módulo não depende da força de protensão e que impondo tensões limites para os materiais, valores usuais da perda progressiva, além de desprezar a parcela  $(1-\gamma_{pp})M_0$  por estar indeterminada, é possível impor a característica geométrica  $W_{1S}$ , mesmo sem conhecer a geometria da seção transversal que não recebe mesa posterior, como sendo:

$$W_{1S} \geq \begin{cases} \frac{M_{CFQ^*}}{0,7\gamma_{pp}f_{cj}} \\ \frac{M_{CR^*}}{0,7\gamma_{pp}f_{cj} + 0,84f_{ctk}} \end{cases} \quad (24)$$

onde  $M_{CFQ^*}$  e  $M_{CR^*}$  são momentos fletores para uma combinação de carregamento sem o efeito do peso próprio  $M_0$ , ainda desconhecido.

Para o caso de seção transversal que receberá mesa posterior, ainda é possível simplificar a Eq. (23) impondo uma condição prática usual para vigas de edifícios, onde:

$$\gamma_{pi} \frac{P_0}{A_{CS}} \left(1 - \frac{1}{k_A}\right) \approx 0,1f_{cj} \approx f_{ctj} \quad \text{para } k_A \approx 1,5 \quad (25)$$

Assim, é possível estabelecer o valor mínimo para o módulo resistente da seção da pré-viga para classe de agressividade CAA III, o qual é menor do que a condição imposta para o caso de seção transversal final igual à inicial:

$$W_{1S} \geq \begin{cases} \frac{M_{CFQ^*} + \left(1 - \frac{1}{k_{W1}}\right)M_1}{0,6k_{W1}\gamma_{pp}f_{cj}} \\ \frac{M_{CR^*} + \left(1 - \frac{1}{k_{W1}}\right)M_1}{k_{W1}(0,6\gamma_{pp}f_{cj} + 0,84f_{ctk})} \end{cases} \quad (26)$$

Deve ser notado que impondo a relação  $k_{W1}$  na Eq. (26), fica também arbitrado o módulo resistente mínimo para a seção final como sendo:

$$W_{1F} \geq k_{W1} \cdot W_{1S} \quad (27)$$

## 4.2 Borda superior da pré-viga

De modo equivalente ao item anterior, pode ser igualada a tensão na borda superior com os valores limites das tensões para as duas condições extremas, multiplicar os dois termos da Eq. (9) por  $\gamma_{pp}$ , subtrair membro a membro da Eq. (14), simplificar termos tal como imposto com  $W_{1S}$ , para finalmente resultar em:

$$W_{2S} \geq \frac{(1-\gamma_{pp})M_0 + M_1 + \frac{M_2}{k_{W2}}}{\gamma_{pp} \left[ \sigma_{\max,j} + \gamma_{pi} \frac{P_0}{A_{CS}} \left(1 - \frac{1}{k_A}\right) \right] - \sigma_{\min}} \quad (28)$$

Caso não exista mesa adicional e desprezando a parcela de  $M_0$  em presença de  $M_{CR*}$ , o módulo resistente mínimo fica independente de  $P_0$  e resulta simplesmente em:

$$W_{2s} \geq \frac{M_{CR*}}{0,84\gamma_{pp}f_{ctj} + 0,7f_{ck}} \quad (29)$$

Simplificando a Eq. (28), tal como feito anteriormente para a borda inferior, tem-se para a situação de imposição de mesa superior adicional:

$$W_{2s} \geq \frac{M_{CR*} + \left(1 - \frac{1}{k_{w2}}\right)M_1}{k_{w2}(1,84\gamma_{pp}f_{ctj} + 0,7f_{ck})} \quad (30)$$

### 4.3 Limites para a protensão

Determinada a geometria da seção transversal, deve ser obtido o intervalo de variação para a força de protensão de modo a não ocorrerem tensões no concreto acima de certos limites impostos. Desde que obedecidos os valores anteriores para os módulos resistentes da seção da pré-viga no meio do vão, a rigor só interessa conhecer o valor mínimo dessa força. Na prática, interessa também conhecer o limite máximo, pois muitas vezes o arranjo de cabos de protensão utilizado em pistas longas é aproveitado para a produção de vigas com comprimentos unitários diferentes, o que pode levar a tensões no concreto excessivas e tanto maiores quanto menor for  $M_0$ .

Conhecida a geometria da peça, é possível determinar a parcela de peso próprio  $M_0$  e obter desigualdades para a força de protensão envolvendo as tensões limites para cada borda da seção. As desigualdades devem ser satisfeitas simultaneamente. Quando os módulos resistentes da seção são insuficientes ou pouco maiores do que o mínimo necessário, pode ocorrer de não existir solução para o sistema de inequações para uma dada posição do cabo resultante  $y_p$ . Nesse caso, pode ser escolhida outra seção transversal com maior altura total ou pode ser aplicada protensão na face superior da peça de modo a levantar a posição do cabo resultante.

A aplicação de cabos adicionais na face superior da pré-viga reduz a eficiência dos cabos inferiores por conduzir a posição do cabo resultante para mais próxima do Centro Geométrico  $CG$  da peça. No entanto, tal artifício permite manter a altura reduzida da pré-viga com aumento da taxa total de armadura de protensão.

Em razão das limitações deste texto, a avaliação da força de protensão não será apresentada, apesar de ser obtida com procedimento algébrico equivalente ao utilizado neste texto para a determinação dos módulos resistentes.

## 5 Exemplos de aplicação

A título de ilustração do procedimento aqui sugerido, será considerada a situação de viga pré-fabricada com pré-tração para edifício comercial de vão teórico de 7 m para ambiente de CAA III que deve ser estimada para suportar as seguintes ações linearizadas correspondentes ao apoio de laje alveolar com vão de 10 m de cada lado da peça:

$$g_1 = 50 \text{ kN/m}; \quad g_2 = 15 \text{ kN/m}; \quad q = 30 \text{ kN/m} \quad (31)$$

sem a consideração do peso próprio da peça, a ser ainda determinado. Serão admitidos os seguintes valores iniciais para os materiais e para as perdas de protensão:

$$\begin{aligned}
 f_{ck} &= 40,0 \text{ MPa}; & f_{ctk} &= 3,5 \text{ MPa} \\
 f_{cj} &= 24,0 \text{ MPa}; & f_{ctj} &= 2,5 \text{ MPa} \\
 \gamma_{pi} &= 0,95; & \gamma_{pp} &= 0,85
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

Para as condições impostas e admitindo combinações de ações típicas para edifícios comerciais, os momentos solicitantes (sem o peso próprio da peça) são:

$$\begin{aligned}
 M_{CFQ*} &= (50 + 15 + 0,6 \times 30) \frac{7^2}{8} \times 100 = 50.800 \text{ kN} \cdot \text{cm} \\
 M_{CR*} &= (50 + 15 + 30) \frac{7^2}{8} \times 100 = 58.200 \text{ kN} \cdot \text{cm}
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

### 5.1 Exemplo 1

Caso a seção transversal não venha a receber mesa adicional, os módulos resistentes mínimos da peça podem ser obtidos pelas Eqs. (24) e (29):

$$W_{1S} \geq \begin{cases} \frac{50.800}{0,7 \times 0,85 \times 2,4} = 35.574 \text{ cm}^3 \\ \frac{58.200}{0,7 \times 0,85 \times 2,4 + 0,84 \times 0,35} = 33.798 \text{ cm}^3 \end{cases}
 \tag{34}$$

$$W_{2S} \geq \frac{58.200}{0,84 \times 0,85 \times 0,25 + 0,7 \times 4} = 22.999 \text{ cm}^3
 \tag{35}$$

Deve ser observado que, dependendo da intensidade permitida para a tensão de tração, a combinação de ações que conduz ao maior valor de  $W_{1S}$  pode não ser aquela correspondente à situação de carregamento máximo. Também é importante notar que, normalmente, a condição para o módulo resistente  $W_1$  é mais severa do que para o módulo  $W_2$ . Esta observação permite deduzir que perfis pré-moldados protendidos compostos de seção inicial com T invertido (Figura 1d) podem ser mais eficientes do que aqueles com seção T (Figura 1b).

Como solução, pode ser escolhida seção retangular com dimensões de  $40 \times 80 \text{ cm}^2$ , o que resulta nas seguintes propriedades geométricas da seção bruta de concreto:

$$A_{CS} = 3.200 \text{ cm}^2; \quad W_{1S} = 42.667 \text{ cm}^3; \quad W_{2S} = 42.667 \text{ cm}^3$$

Apesar de não ser introduzido o procedimento para determinação da protensão, julgou-se útil apresentar alguns dados obtidos para o processamento completo da peça a partir da geometria definida, a título de validar o procedimento algébrico aqui descrito, mas sem considerar detalhes de alojamento. Para efeito dessa análise foi considerado o peso próprio  $g_0$  da viga (agora determinado), a homogeneização da seção incluindo a presença da armadura ativa no Estádio I e a avaliação das perdas de protensão imediata e progressiva, tal como resumido a seguir. Com relação às perdas de protensão, deve ser destacado que foram considerados os efeitos da composição da seção com concretos diferentes, após a protensão, e que foram desconsiderados os efeitos de retrações diferenciais dos dois concretos.

De mesmo modo, a Tabela 1 apresenta o resumo de tensões nas bordas de extremidade para a seção meio do vão.

Protensão na face superior: 4 cordoalhas CP-190 RB  $\phi$  9.5mm  
 Protensão na face inferior: 17 cordoalhas CP-190 RB  $\phi$  9.5mm  
 Perda imediata:  $\gamma_{pi} = 0,945$   
 Perda progressiva:  $\gamma_{pp} = 0,860$

Tabela 1 – Tensões elásticas (MPa) nas extremidades da seção para cada situação de projeto – Exemplo 1

Borda	Ato de protensão 0	CFQ 1	CR 2
2	+1,0	-10,9	-12,5
1	-10,6	+2,3	+4,0

## 5.2 Exemplo 2

Mantendo as mesmas condições anteriores, poderia ser escolhida uma seção transversal com seção duplo T com alma de  $15 \times 90 \text{ cm}^2$  e mesas de 38 cm (escolhida a partir de uma tabela de perfis padronizados). Para estas condições, são apresentados os resultados equivalentes aos do exemplo anterior.

$$A_{CS} = 1.969 \text{ cm}^2; \quad W_{1S} = 41.056 \text{ cm}^3; \quad W_{2S} = 39.825 \text{ cm}^3$$

Protensão na face superior: 4 fios CP-150 RN  $\phi$  6.0mm  
 Protensão na face inferior: 13 cordoalhas CP-190 RB  $\phi$  9.5mm  
 Perda imediata:  $\gamma_{pi} = 0,935$   
 Perda progressiva:  $\gamma_{pp} = 0,850$

Tabela 2 – Tensões elásticas (MPa) nas extremidades da seção para cada situação de projeto – Exemplo 2

Borda	Ato de protensão 0	CFQ 1	CR 2
2	+1,2	-11,5	-13,3
1	-13,3	+1,9	+3,6

## 5.3 Exemplo 3

Seja agora outra situação onde será incorporada no campo uma mesa adicional de concreto C30 e mantidas as demais condições do Exemplo 1. Para efeito de simplificação deste exemplo, será desconsiderada a posição da laje e admitido apenas que a mesa possui dimensões de largura arbitrada de 90 cm e altura de 20 cm.

Admitindo  $k_{w1} = k_{w2} = 2,0$ , os módulos resistentes mínimos ficam determinados pelas Eqs. (26) e (30), sendo avaliados por:

$$W_{1S} \geq \begin{cases} \frac{50.800 + \left(1 - \frac{1}{2,0}\right) 30.625}{0,6 \times 2,0 \times 0,85 \times 2,4} = 27.007 \text{ cm}^3 \\ \frac{58.200 + \left(1 - \frac{1}{2,0}\right) 30.625}{2,0 \times (0,6 \times 0,85 \times 2,4 + 0,84 \times 0,35)} = 24.214 \text{ cm}^3 \end{cases} \quad (36)$$

$$W_{2s} \geq \frac{58.200 + \left(1 - \frac{1}{2,0}\right) 30.625}{2,0(1,84 \times 0,85 \times 0,25 + 0,7 \times 4,0)} = 11.519 \text{ cm}^3 \quad (37)$$

Como solução, pode ser escolhida seção retangular da pré-viga com dimensões de 40x70cm<sup>2</sup>, com os resumos apresentados a seguir.

$$A_{CS} = 2.800 \text{ cm}^2; \quad W_{IS} = 32.667 \text{ cm}^3; \quad W_{2S} = 32.667 \text{ cm}^3$$

Protensão na face superior: 4 fios CP-150 RN  $\phi$  6.0mm  
 Protensão na face inferior: 14 cordoalhas CP-190 RB  $\phi$  9.5mm

Perda imediata:  $\gamma_{pi} = 0,940$

Perda progressiva:  $\gamma_{pp} = 0,870$

Tabela 3 – Tensões elásticas (MPa) nas extremidades da seção para cada situação de projeto – Exemplo 3

Borda	Ato de protensão 0	CFQ 1	CR 2
4	- - -	-2,7	-3,6
3	- - -	-1,2	-1,6
2	+2,0	-8,1	-8,5
1	-10,3	+2,0	+4,1

## 5.4 Exemplo 4

Neste exemplo, é considerada situação equivalente ao do exemplo 3, apenas com substituição da pré-viga para seção duplo T com alma de 12x80cm<sup>2</sup>.

$$A_{CS} = 1.534 \text{ cm}^2; \quad W_{IS} = 25.380 \text{ cm}^3; \quad W_{2S} = 28.898 \text{ cm}^3$$

Protensão na face superior: 4 fios CP-150 RN  $\phi$  6.0mm  
 Protensão na face inferior: 12 cordoalhas CP-190 RB  $\phi$  9.5mm

Perda imediata:  $\gamma_{pi} = 0,910$

Perda progressiva:  $\gamma_{pp} = 0,840$

Tabela 4 – Tensões elásticas (MPa) nas extremidades da seção para cada situação de projeto – Exemplo 4

Borda	Ato de protensão 0	CFQ 1	CR 2
4	- - -	-2,7	-3,6
3	- - -	-0,8	-1,2
2	+2,1	-9,1	-9,4
1	-15,5	+2,5	+4,2

## 6 Discussão de resultados

Questões estéticas à parte e com relação exclusivamente aos exemplos analisados, a escolha da seção de viga protendida mais otimizada sem acréscimo de mesa superior adicional é a do Exemplo 2 em comparação com a seção do Exemplo 1, pois, apesar de maior altura, conduz ao menor volume de concreto (e, portanto, menor peso). Esta escolha também leva a menor consumo de armadura de protensão em razão da maior altura útil e da maior tensão de compressão no Centro Geométrico, devido à menor área bruta de concreto.

De modo equivalente, para seção composta com adição de mesa superior em campo, a melhor escolha da seção é a do Exemplo 4 em comparação com a seção do Exemplo 3, pelas mesmas razões expostas.

## 7 Conclusões

A partir das deduções e dos resultados obtidos, é possível estabelecer uma estratégia geral e simples para a definição de uma seção pré-fabricada protendida com pré-tração, na sequência indicada:

- a) Definir resistências do concreto à compressão e à tração nas idades de protensão e aos 28 dias;
- b) Definir Classe de Agressividade Ambiental na qual a peça estará sujeita, sendo que a maior agressividade do ambiente conduz a maior exigência para o ELS-F;
- c) Definir combinações de ações para a situação Quase Permanente e Rara, mesmo sem conhecer a ação de peso próprio  $g_0$  da peça;
- d) Adotar perdas e relações entre as propriedades geométricas da seção bruta de concreto da seção inicial e da seção final da viga;
- e) Determinar módulos resistentes mínimos para as bordas da seção da peça segundo as inequações aqui apresentadas;
- f) Escolher forma e geometria da seção da viga, lembrando que a protensão deverá ser tanto maior quanto os módulos resistentes adotados estiverem mais próximos dos valores mínimos determinados;
- g) Conhecida a seção, é possível calcular o momento fletor de peso próprio  $M_0$ ;
- h) Adotar armadura de protensão inferior e, eventualmente, superior para compensar a pouca liberdade na posição vertical dos cabos de protensão;
- i) Estimar perdas de protensão inicial e progressiva;
- j) Calcular as propriedades geométricas da seção transversal homogeneizada no Estádio I simples e composta, incluindo a armadura ativa e, eventualmente, passiva;
- k) Verificar tensões nas bordas extremas da peça para cada etapa construtiva e para cada combinação de carregamento.

## 8 Referências

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (2007) – **NBR 6118:2007 – Projeto de estruturas de concreto** – Procedimento. Rio de Janeiro.
- BUCHAIM, R. (2008) – **Concreto protendido: tração axial, flexão simples e força cortante**. Londrina.
- HANAI, J.B. (2005) – **Fundamentos do concreto protendido**. E-book. São Carlos.
- LIN, T.Y., BURNS, N.H. (1981) – **Design of prestressed concrete structures**. Berkeley.
- MASON, J. (1976) – **Concreto armado e protendido: princípios e aplicações**. Rio de Janeiro.
- MIGLIORE, G.M. (2008) – **Dimensionamento e utilização de laje alveolar protendida**. Monografia (TCC). Barretos.
- PFEIL, W. (1984) – **Concreto protendido**. Rio de Janeiro
- ROCHA, A.M. (1972) – **Novo curso prático de concreto armado**. Vol. 5: Concreto protendido. Rio de Janeiro